ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 20 SEPTEMBRE 1937.

PRÉSIDENCE DE M. ÉMILE BOREL.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Sur la distribution régulière des points d'un ensemble énumérable linéaire.* Note de M. **Émile Borel**.

Quand on donne un ensemble énumérable de points sur un segment de droite Σ, il est naturel de se demander si les points de cet ensemble sont répartis d'une manière asymptotiquement homogène; en désignant par a_n et b_n le nombre des points dont l'indice est inférieur à n et qui sont intérieurs à deux segments partiels a et b, il est aisé de construire des ensembles tels que le rapport a_n/b_n ait pour limite a/b lorsque n augmente indéfiniment, quels que soient a et b sur Σ.

M. Julius Wolff m'a signalé récemment un problème posé par M. van der Corput et non encore résolu; il s'agit de savoir si, dans le cas particulier où les segments a et b sont deux segments égaux quelconques de Σ, la différence $a_n - b_n = k_n$ peut être inférieure en valeur absolue à un nombre fixe k indépendant de n.

Ce qui fait la difficulté de ce problème, c'est qu'il est possible de trouver des distributions pour lesquelles k_n croît très lentement avec n; on peut notamment obtenir des distributions suffisamment régulières pour que l'on ait $|k_n| < c \log n$. Voici un exemple d'une telle distribution : écrivons, dans le système binaire $n = \alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1} \alpha_s$, les chiffres $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ étant égaux à 0 ou 1. L'abscisse du point u_n sur le segment unité, sera donnée par $u_n = 0, \alpha_s \alpha_{s-1}, \ldots, \alpha_2 \alpha_1$, ce nombre étant écrit dans le système binaire.

Est-il possible d'avoir une distribution encore plus régulière ?

La méthode suivante me paraît devoir conduire à la distribution D, la plus régulière possible, mais je n'ai pu arriver à démontrer si elle satisfait à la condition de M. van der Corput, ni même si k_n est inférieur à une fonction croissant moins vite que $\log n$.

Pour définir la distribution D, nous procéderons en deux étapes : 1° définition de l'ordre respectif des indices n; 2° détermination des abscisses des points u_n.

1° Écrivons les trois premiers indices 0, 2, 1. Pour placer l'indice 3, nous choisirons l'intervalle pour lequel la somme des indices est la plus faible, c'est-à-dire l'intervalle 0, 2. Nous obtiendrons ainsi 0, 3, 2, 1. Ici, deux intervalles ont la même somme $0+3=2+1$; nous placerons l'indice 4 dans celui de ces intervalles qui comprend le plus petit indice (ici 0-3) et l'indice 5 dans l'autre (2-1), nous obtiendrons ainsi 0, 4, 3, 2, 5, 1; les intervalles ayant les sommes les plus faibles sont $0+4=4$, $3+2=5$; nous y placerons les indices 6, 7, ce qui donnera 0, 6, 4, 3, 7, 2, 5, 1; nous avons maintenant $0+6=5+1$ et nous placerons les indices 8 et 9, soit 0, 8, 6, 4, 3, 7, 2, 5, 9, 1. On continuera ainsi indéfiniment, de sorte que l'ordre respectif de tous les indices n sera déterminé de proche en proche sans ambiguïté, en choisissant chaque fois l'intervalle pour lequel la somme des indices est la plus faible, et en cas d'égalité l'indice le plus faible.

2° Plaçons les points u_0 et u_1 aux deux extrémités du segment unité; pour placer le point u_2 considérons la succession d'indices que nous avons construite et désignons par a_n et b_n les nombres respectifs d'indices inférieurs à n compris respectivement entre 0 et 2 et entre 2 et 1; on a, par exemple, $a_9=5$, $b_9=2$; soit σ la limite du rapport a_n/b_n pour n infini; on déterminera la position de u_2 par la condition $u_0u_2=\sigma u_2u_1$. On procédera de la même manière pour déterminer la position des autres points u_n.

L'étude approfondie des propriétés de la distribution D me paraît devoir conduire à des conséquences fort intéressantes.

PHYSIOLOGIE. — *L'isochronisme neuro-musculaire comme fait empirique.* Note de M. **Louis Lapicque**.

Il y a 30 ans, j'attirais l'attention sur l'importance d'un accord chronologique pour la transmission de l'excitation entre deux éléments anatomiques [1]. Ce principe a donné naissance à des développements considé-

---

[1] *C. R. Soc. de Biol.*, 63, 1907, p. 787.

rables, tant expérimentaux que théoriques, et, d'autre part, à des controverses assez vives.

J'ai eu récemment le plaisir, dans un entretien amical, d'entendre l'éminent physiologiste anglais A. V. Hill, qui naguère avait pris parti contre mes conceptions, me déclarer qu'il n'aurait plus d'objections théoriques à y faire, si elles étaient exposées sous une forme différente, dont il m'a indiqué le principe. Dans la correspondance qui a suivi, notre accord est apparu plus difficile, et je n'ai pas réussi à trouver la forme exacte convenant à M. Hill. Il me paraît valoir la peine d'essayer à nouveau d'éclaircir notre différend, et pour cela, de préciser publiquement chacun notre point de vue. Pour ma part, je trouve cette publication d'autant plus utile que j'ai senti la valeur de certaines suggestions de M. Hill, et, par conséquent, leur ferai place.

Mais il me faut d'abord rappeler les faits relatifs à un cas particulier qui est l'origine de la question.

Comme début, dès 1906, j'avais, avec Madame Lapicque, observé entre un muscle strié et son nerf moteur une grande ressemblance dans l'allure de l'excitabilité électrique en fonction du temps; nous n'avions encore ni le mot, ni la forme précise de chronaxie et nous avions parlé d'*homochronisme*. Même, sous cette forme un peu vague, une telle affirmation était en contradiction avec la doctrine classique, qui enseignait une excitabilité musculaire notablement plus lente que l'excitabilité nerveuse; et presque aussitôt après notre publication, un jeune physiologiste fort distingué, Keith Lucas, de Cambridge, indiquait sur le muscle pris *in toto*, deux courbes d'excitabilité en fonction du temps, l'une rapide, très semblable à la nôtre, et une autre, sensiblement plus lente; K. Lucas, avec de bonnes raisons expérimentales, localisait dans les filets nerveux la première, qu'il appelait γ, et dans les fibres musculaires, la seconde qu'il appelait α. Ainsi la doctrine classique semblait confirmée par l'analyse moderne de l'excitation électrique. Mais de notre côté, nous ne trouvions dans aucun cas l'excitabilité α, et, le concept de chronaxie étant dégagé, cette mesure précise se montrait toujours approximativement égale dans le muscle et dans le nerf; et nous pensions donc avoir le droit d'affirmer, suivant une expression condensée, l'*isochronisme neuro-musculaire*.

Bien plus, étudiant en détail le cas du curare, d'où Brücke en 1867 avait cru pouvoir déduire l'excitabilité musculaire lente devenue ensuite classique, il nous apparut que l'action propre du curare est, sans changer la chronaxie nerveuse, d'augmenter la chronaxie musculaire plus ou moins

suivant la dose. Ainsi l'isochronisme normal fait place à un *hétérochronisme* plus ou moins accentué, et, pour un certain degré d'hétérochronisme, l'excitation cesse de se transmettre du nerf au muscle. D'autres poisons ont aussi le pouvoir de *décrocher*, suivant l'expression de Claude Bernard, un nerf resté excitable d'un muscle excitable. Ils produisent aussi un hétérochronisme, soit en augmentant la chronaxie musculaire comme le curare, soit en diminuant cette chronaxie, soit encore en diminuant la chronaxie nerveuse. La chronaxie musculaire sera donc, suivant le cas, plus grande, plus petite, ou de même valeur qu'à l'état normal; seul, l'hétérochronisme est caractéristique de la curarisation. Qu'il soit la cause même de l'arrêt, autrement dit que l'isochronisme soit la condition du passage, c'est ce que démontre l'expérience suivante, véritable épreuve cruciale. Soit un poison qui diminue la chronaxie nerveuse (strychnine), un autre qui diminue la chronaxie musculaire (par exemple vératrine ou pilocarpine dans une première phase). Chacun d'eux, capable de curariser quand il est donné seul, est capable aussi de supprimer la curarisation produite par le poison qui agit dans le même sens sur l'autre élément du complexe, rétablissant ainsi l'isochronisme sur une autre durée ([2]).

Plus récemment, nous avons obtenu, comme démonstration du rôle de l'isochronisme, un autre fait remarquable que j'ai oublié d'invoquer dans les dernières polémiques.

Orbeli et Ginesinzki avaient observé qu'un muscle curarisé à la limite, reprend son excitabilité indirecte quand on stimule les rameaux sympathiques correspondants, stimulation qui est sans effet appréciable sur la contractilité directe ou indirecte d'un muscle normal. En 1929, nous avons, avec Orbeli, constaté que la stimulation sympathique diminue la chronaxie d'un muscle normal, également celle d'un muscle curarisé, la ramenant vers la normale ([3]). Le phénomène d'Orbeli et Ginesinzki rentre donc *de plano* dans le cadre de la théorie chronologique de la curarisation; d'autres explications vagues ne résistent pas à l'observation suivante. Si, au lieu du curare (ou de la fatigue qui agit dans le même sens et curarise par augmentation de chronaxie), on fait intervenir une substance qui curarise par diminution de chronaxie, la stimulation du sympathique a l'effet exactement inverse : après une dose trop faible pour curariser, elle *supprime* l'excita-

---

([2]) Pour les références bibliographiques de la première partie de cette Note, voir L. Lapicque, *L'excitabilité en fonction du temps*. Paris, 1926.

([3]) *C. R. Soc. de Biol.*, 103, 1930, p. 875.

bilité indirecte. Autrement dit, le phénomène est régi par la somme algébrique des changements de chronaxie ([1]).

Cet ensemble de faits publié par nous dès 1912 serait inconcevable si le nerf et le muscle étaient hétérochrones à l'état normal. Avec Keith Lucas, en 1914, nous avions convenu de nous réunir pendant les vacances pour discuter à loisir nos résultats contraires, mais la guerre est venue; j'ai été mobilisé; puis K. Lucas s'est tué en expérimentant des appareils d'aviation.

La question en est longtemps restée là. Ne pouvant retrouver ni comprendre les résultats de K. Lucas, je m'étais résigné à interpréter négativement ses expériences. Mais en 1930, W. A. H. Rushton, étudiant l'excitabilité sur un muscle entièrement plongé dans la solution physiologique sans électrodes définies, obtenait, pour l'intensité en fonction du temps, à côté de courbes γ avec leur allure bien connue, des courbes α incontestablement différenciées par rapport à γ. D'autre part, il démontrait, par un critérium nouveau, que, dans les conditions de ses expériences, γ concerne les rameaux nerveux intramusculaires à l'exclusion des fibres musculaires. Le contrôle que j'en fis immédiatement confirma entièrement les données expérimentales de Rushton, et par conséquent, celles de K. Lucas. Mais je vis aussi que l'allure chronologique de la courbe α, plus précisément la durée liminaire pour une intensité double de la rhéobase, variait en sens inverse de la longueur du bain par où le muscle reçoit le courant ; avec une électrode tubulaire assez fine, elle se confond avec γ.

Du coup, le déterminisme du différend avec K. Lucas s'éclairait. Antérieurement, j'avais employé des électrodes diverses, mais toujours relativement fines. Lucas employait des électrodes dites *fluides*, dans lesquelles la cathode était constituée par un bain entourant le muscle sur une longueur de quelques millimètres. On comprend donc que j'aie obtenu exclusivement γ, et Lucas des α intermédiaires entre γ et les α de Rushton.

Il est bien entendu qu'il s'agit de conditions expérimentales excluant l'intervention des nerfs. Mais alors, où prendre la chronaxie du muscle ? Sur le muscle de grenouille, avec une cathode fine, elle sera d'environ 0,3 milliseconde; dans un bain ample, 10 à 20 millisecondes. L'essai comparatif, suivant le principe posé par Engelmann, sur des muscles à contraction plus lente, donne la réponse. α est semblable pour tous; il n'est donc pas une *chronaxie*, c'est-à-dire une mesure de la valeur physio-

([1]) *C. R. Soc. de Biol.*, 103, 1930, p. 393.

logique du temps. Au contraire, la cathode fine donne, pour la durée liminaire sous le double de la rhéobase, des valeurs qui classent les muscles dans le même ordre que leurs durées de contraction; par conséquent, sans qu'il soit besoin de se mettre d'accord sur le phénomène qui fausse les mesures avec les électrodes diffuses, on doit considérer que seules les électrodes ponctuelles donnent des mesures correctes; or c'est cette technique qui nous a montré l'isochronisme neuro-musculaire ([5]).

Celui-ci apparaît donc comme un fait, et même un fait empirique; tout ce qui précède est entièrement expérimental. Sur ce terrain même, il y a bien eu des contradictions, parfois assez vives. Après discussion, il ne subsiste de litige que sur quelques points d'une importance minime. Notamment, si le mécanisme de curarisation par la strychnine n'est pas tiré au clair, le fait essentiel de la décurarisation réciproque entre la strychnine et la vératrine ou la pilocarpine est hors de conteste; M. Rushton, après avoir formellement nié le fait, a explicitement accepté mon explication de son insuccès ([6]).

Mais, d'autre part, en partant du début de cette série de constatations relative au cas particulier muscle strié-nerf volontaire, et simultanément, s'est développée une théorie de l'isochronisme comme condition de la transmission intercellulaire. Cette théorie, qui est l'objet propre de la présente discussion, sera examinée dans une prochaine Communication.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur le dosage du silicium dans les aciers.* Note de M. Georges Charpy.

L'analyse chimique a été très peu utilisée jusqu'ici en France dans les spécifications destinées à définir les aciers en vue de leur utilisation industrielle. Mais quelques applications apparaissent déjà dans certains cahiers des charges et elles se multiplieront certainement en raison de l'augmentation continue du nombre des compositions employées en sidérurgie. Pour que cette utilisation, qu'on peut considérer comme nouvelle, de l'analyse chimique ne conduise pas à des difficultés pratiques, il sera nécessaire d'effectuer différentes études préalables, et notamment de déterminer la précision réalisable dans les déterminations qui serviront à classer un

([5]) *C. R. Soc. de Biol.*, **108**, 1931, p. 719; **111**, 1932, p. 554. *J. of Physiology*, **73**, 1931, p. 219; **78**, 1933, p. 381.

([6]) *Biological Reviews*, **10**, 1935, p. 13.

produit comme utilisable ou non. J'ai cru intéressant de rassembler quelques observations, et d'effectuer un certain nombre d'essais, à propos d'un cas très particulier du problème général rappelé ci-dessus, le dosage du silicium dans les aciers; ce dosage est en effet prévu dans certaines spécifications récentes qui ont donné lieu à quelques discussions. J'ajouterai que, pour contrôler les conclusions auxquelles j'arrive, j'ai fait appel au concours de plusieurs chefs de laboratoire d'aciéries, très expérimentés, notamment MM. Clavère, Arnaud et Neyret, car les techniciens, qui font constamment des analyses sidérurgiques, arrivent incontestablement à une précision que l'on obtient bien rarement dans les laboratoires non spécialisés.

Nous avons appliqué les méthodes usuelles de dosage du silicium et leurs principales variantes à divers aciers de fabrication courante, et aussi à des produits synthétiques préparés notamment en prélevant, dans le four Martin même, immédiatement avant la coulée, des quantités égales d'acier liquide qui étaient additionnées, avant solidification, de quantités croissantes de silicium, ou d'aluminium, ou d'autres produits d'addition.

La méthode qui est le plus généralement employée pour doser le silicium dans les aciers consiste à dissoudre le métal dans un mélange d'acides, le plus souvent d'acides sulfurique et azotique, à insolubiliser la silice en concentrant la solution jusqu'à ce qu'il se produise « des fumées blanches », à filtrer la liqueur étendue et à peser le résidu retenu par le filtre.

Le rassemblement sur un filtre de la silice insolubilisée par évaporation de la liqueur d'attaque est par lui-même une opération délicate, en raison de la couleur du précipité, qui le rend difficilement visible et de sa légèreté aussitôt qu'il est desséché. Si l'on considère en outre que l'attaque des vases en verre ou en porcelaine produit des résidus siliceux et qu'il en est de même pour les moindres poussières provenant des bains de sable, etc., on ne s'étonnera pas que la précision de ces déterminations ne puisse pas être poussée très loin pratiquement. En fait, de l'examen de nombreuses séries d'analyses, il semble résulter que des écarts de deux unités sur la seconde décimale du chiffre donnant la proportion pour cent de silicium ne peuvent être discutés. Des séries d'analyses effectuées sur une même limaille, par les mêmes méthodes, par des chimistes soigneux et expérimentés, ont toujours donné des chiffres s'échelonnant entre deux valeurs différant de 0,02 environ. Dans les analyses industrielles courantes, les différences sont plus fortes et peuvent atteindre le double de la valeur indiquée ci-dessus.

Ce qui précède s'applique à la pesée du résidu insoluble dans les acides que l'on considère le plus souvent comme donnant la teneur en silicium. On sait cependant que ce résidu peut contenir autre chose que de la silice, notamment certains oxydes; quand ceux-ci sont colorés, on est averti de leur présence, mais tel n'est pas le cas pour d'autres, tels que l'alumine qui existe fréquemment dans les aciers, souvent calmés par des additions d'aluminium, et pouvant contenir des inclusions silico-alumineuses. Pour éviter les erreurs provenant de ce fait, on a depuis longtemps proposé de traiter le résidu insoluble dans les acides par l'acide fluorhydrique, qui volatilise la silice et de retrancher du poids de l'insoluble trouvé précédemment, le poids du résidu non volatilisable par l'acide fluorhydrique. Nous avons vérifié l'efficacité de cette opération sur différents mélanges synthétiques; on peut bien admettre que l'acide fluorhydrique volatilise toute la silice et rien que la silice; et que son emploi n'augmente pas notablement les erreurs relatives à un même échantillon soumis à plusieurs analyses. En valeur absolue, les réductions de la teneur apparente en silicium varient beaucoup suivant le mode de fabrication de l'acier. Souvent presque nulles, elles atteignent 0,015 et même un peu plus dans les aciers calmés complètement à l'aluminium. Les résidus d'alumine observés paraissent provenir à peu près exclusivement de la fraction de l'aluminium ajouté dans le métal liquide, qui a été oxydée et a formé de l'alumine très fine restant en suspension. En forçant, en effet, la dose d'aluminium, on n'augmente pas le poids de l'alumine trouvée dans l'insoluble.

La silice volatilisée par l'acide fluorhydrique correspond encore à deux provenances différentes, savoir le silicium dissous dans l'acier et oxydé par l'attaque aux acides, et le silicium préalablement oxydé et existant en suspension dans le métal. La séparation de ces deux fractions, souvent tentée, paraît très difficile. La seule méthode qui semble donner des résultats sûrs est l'attaque du métal par le chlore gazeux qui volatilise seulement le silicium non oxydé; elle est d'ailleurs d'une application très délicate. Elle conduit à une nouvelle réduction du chiffre attribué au silicium d'après la pesée du résidu insoluble dans les acides.

Comme exemple des modifications que les remarques qui précèdent peuvent apporter dans les résultats de la pratique métallurgique, nous citerons des chiffres obtenus récemment sur deux coulées d'acier, préparées en vue de satisfaire à des spécifications imposant une teneur en silicium inférieure à 0,03 et pour cela calmées à l'aluminium.

La première donnait, par pesées de l'insoluble, un résidu faible corres-

pondant à une teneur en silicium égale à 0,024, qui a été encore réduite par attaque à l'acide fluorhydrique, et par attaque au chlore, à 0,07, ou du moins à un chiffre plus petit que 0,01.

La seconde coulée a été choisie parce qu'elle donnait, au contraire, à l'attaque aux acides, un résidu exceptionnellement important, conduisant à une teneur en silicium de 0,055, qui a été réduite, après attaque à l'acide fluorhydrique, à 0,041 et par l'attaque au chlore, à 0,028.

Dans ce dernier cas, le métal peut donc être jugé acceptable ou inacceptable suivant la méthode analytique employée.

Nous conclurons que toute spécification d'ordre chimique doit être accompagnée de la description minutieuse de la méthode analytique qui sera employée pour la vérification. Ajoutons que les remarques qui précèdent devraient être prises en considération dans les études préalables sur lesquelles on se base pour fixer numériquement une spécification, et que cela paraît avoir été bien rarement fait.

CORRESPONDANCE.

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Sur la mesure presque isométrique.* Note [1] de M. **Antoine Appert.**

I. Nous avons développé [2] une théorie générale de la mesure dans les espaces distanciés en imposant la condition suivante :

i. Deux ensembles pouvant se déduire l'un de l'autre par une isométrie (transformation ponctuelle biunivoque conservant les distances) *ont toujours même mesure.*

Le principal objet de la présente Note est de démontrer qu'en remplaçant la condition i par une condition analogue moins stricte i', il existe dans tout espace distancié compact non vide, et *en particulier dans tout ensemble non vide borné et fermé d'un espace euclidien*, une mesure satisfaisant à i' et prenant la valeur 1 sur l'espace entier. Pour obtenir en toute généralité un tel résultat, il est indispensable d'affaiblir la condition i, comme le montrent des exemples simples.

---

(1) Séance du 6 septembre 1937.

(2) *Bull. des Sc. Math.*, 60, 1936, p. 329-352 et p. 368-380.

II. Soit H un espace distancié ([3]). Une fonction d'ensemble mE définie pour tout ensemble $E \subset H$ sera dite une *mesure* si elle vérifie les quatre conditions suivantes :

p_1. On a toujours $0 \leq mE \leq +\infty$.

p_2. Si $E \subset F$, on a toujours $mE \leq mF$.

p_3. Si un ensemble E est somme d'un ensemble au plus dénombrable d'ensembles E_i $(i = 1, 2, \ldots)$, on a toujours $mE \leq \sum\limits_i mE_i$.

p_4. Si E et F sont deux ensembles dont la distance est $\neq 0$, on a toujours

$$m(E+F) = mE + mF.$$

On sait que, quand ces quatre conditions sont satisfaites, on peut appliquer la théorie générale de la mesure due à Caratheodory ([4]), et qu'en particulier la fonction mE est alors *complètement additive* dans la classe des ensembles boréliens de l'espace H.

Une mesure mE est dite *isométrique* si elle vérifie la condition i. Et une mesure mE sera dite *presque isométrique* si elle vérifie la condition suivante :

i'. *Toute isométrie qui transforme un ensemble ouvert* O *en un ensemble ouvert* O* *conserve la mesure de chaque ensemble* $E \subset O$.

Enfin, nous posons (comme dans notre Mémoire cité, p. 332) $n(E, r) =$ borne sup. des entiers N tels qu'il existe N points de E dont toutes les distances mutuelles soient $>$ un certain nombre positif r. Le nombre $n(E, r)$ est fini pour chaque ensemble distancié compact E.

III. Soit maintenant H un espace distancié *compact* non vide. Nous poserons successivement, pour tout ensemble $E \subset H$, $\mathcal{E}_H E =$ limite généralisée au sens de M. Banach ([5]) de $n(E, 1/q)/n(H, 1/q)$ quand l'entier $q \to +\infty$; et

$$m_H E = \underset{E \subset \sum\limits_k O_k}{\text{borne inf.}} \sum_k \mathcal{E}_H O_k,$$

les $O_k (k = 1, 2, \ldots)$ étant des ensembles ouverts sur H et formant une famille au plus dénombrable.

Nous avons établi les résultats suivants :

A. *La fonction* $m_H E$ *est une mesure presque isométrique dans l'espace* H,

---

([3]) Nous adoptons pour les espaces distanciés les définitions et la terminologie de notre Mémoire cité (p. 330-331).

([4]) Voir notre Mémoire cité, p. 338-339, et CARATHEODORY, *Nachr. Ges. Wiss.*, Göttingen, 1914, p. 404-426.

([5]) S. BANACH, Note *Sur la mesure de Haar* dans *Théorie de l'intégrale*, par S. Saks, Warszawa, 1933, p. 266. Cette *limite généralisée* existe pour toute suite réelle bornée, ce qui est ici le cas.

prenant la valeur 1 *sur l'espace* H *entier et telle que l'on ait* ([6]), *pour tout ensemble* $E \subset H$,

$$m_H E = \underset{O \text{ ouvert} \supset E}{\text{borne inf.}}\, m_H O.$$

B. *Si une transformation ponctuelle* T *biunivoque, bicontinue et n'augmentant jamais la distance de deux points où elle est définie, transforme un ensemble* G *en un ensemble* T(G) [on peut exprimer ceci en disant que T(G) est une *image topologique non dilatée de* G], *et si l'ensemble* T(G) *est ouvert, alors on a, pour tout ensemble* $E \subset G$,

$$m_H T(E) \leqq m_H E, \quad \textit{et en particulier} \quad m_H T(G) \leqq m_H G.$$

C. *Pour tout ensemble fermé* E *de l'espace* H, *on a*

$$m_H E = \underset{O \text{ ouvert} \supset E}{\text{borne inf.}}\, \mathcal{E}_H O \geqq \underset{r \to 0}{\text{lim inf.}} \frac{n(E, r)}{n(H, r)}.$$

Et pour tout ensemble ouvert O *de l'espace* H, *on a*

$$m_H O \leqq \underset{r \to 0}{\text{lim sup.}} \frac{n(O, r)}{n(H, r)}.$$

IV. Parmi les conséquences des résultats précédents mentionnons seulement que la théorie ci-dessus s'applique à *tout ensemble* H *non vide borné et fermé* (et par conséquent compact en lui-même) *d'un espace euclidien* ([7]) (les mots ouvert et fermé, appliqués à des sous-ensembles de H, étant naturellement pris par rapport à H). Ceci montre en particulier qu'*il existe sur tout arc de Jordan* H *non rectifiable une répartition complètement additive de la masse* 1 *telle que tout arc ouvert* (*sur* H) *qui est image topologique non dilatée d'un autre arc, porte toujours une masse au plus égale à celle de cet autre arc. Le même théorème est vrai pour toute surface de Jordan non rectifiable à la condition de remplacer le mot arc par le mot rondelle.*

([6]) La fonction m_H est donc une *mesure normalisée* ou une *mesure de probabilité* au sens de MM. N. Kryloff et N. Bogolioubоff (*Ann. of Math.*, 38, 1, 1937, p. 68).

([7]) Dans ce cas le théorème C montre que les ensembles fermés sur H ayant *le même ordre* C. M. que H [au sens de M. Bouligand (*Les définitions modernes de la dimension*, Paris, 1935, p. 40)] sont de mesure $m_H > 0$, et que les ensembles ouverts sur H ayant un *ordre* C. M. *inférieur* à celui de H (au sens du même auteur) sont de mesure m_H nulle. D'ailleurs, le nombre $n(E, r)$, qui nous a servi de point de départ, dérive directement des notions introduites par M. Bouligand (*ibid.*) pour évaluer ce qu'il appelle l'ordre C. M. relatif de deux ensembles euclidiens.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les invariants de prolongement relatifs aux fonctions entières.* Note (1) de M. Georges Calugaréano.

Nous avons défini ailleurs (2) les invariants de prolongement, en insistant sur leur utilité quand il s'agit de traduire analytiquement les propriétés globales des fonctions analytiques (propriétés qui ne font intervenir aucun point du plan d'une manière privilégiée, telle l'uniformité, et qui doivent *s'exprimer de la même façon en partant d'un élément quelconque de celle-ci*). Soient $\sum a_n(z-z_1)^n$ et $\sum b_n(z-z_2)^n$ deux éléments quelconques de $f(z)$. En désignant par F une fonction (au sens général) d'une infinité de variables, supposons que l'on a

$$I = F(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = F(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$$

et ceci quels que soient les points z_1 et z_2 situés dans le domaine d'holomorphie de $f(z)$. Une telle expression I sera appelée un *invariant de prolongement*. Nous indiquerons ici une suite infinie de tels invariants relatifs aux fonctions entières de genre fini. Nous avons déjà formé les invariants relatifs aux fonctions entières de genre fini ayant une valeur exceptionnelle au sens de M. Picard [illegible].

Nous définirons une fonction telle que F par une limite, à savoir

$$[illegible]$$

On peut obtenir des invariants en prenant

$$[illegible]$$

où $m(n) \to \infty$ pour $n \to \infty$. Un tel invariant, ne dépendant effectivement d'aucun coefficient a_n à distance finie, sera appelé un *invariant asymptotique*. De tels invariants seront propres à représenter les propriétés de $f(z)$ qui subsistent après addition à celle-ci d'un polynome quelconque (telle l'uniformité). Passons maintenant aux invariants annoncés. Remarquons que l'ordre ρ et le type σ d'une fonction entière sont des invariants de prolongement (3). On sait, d'autre part, que ces constantes ont été géné-

(1) Séance du 13 septembre 1937.

(2) *Mathematica*, 12, 1936, p. [illegible].

(3) Une démonstration est donnée par Pringsheim, *Zahlen- u. Funktionenlehre*, II, 2, p. [illegible].

ralisées, en vue d'une classification plus ample, par E. Lindelöf [1] et P. Boutroux [2]. Or, à l'aide des coefficients tayloriens a_n, ces constantes (positives ou négatives) s'expriment ainsi

$$-\frac{1}{\rho}=\overline{\lim}\frac{\log|a_n|}{n\log n},\qquad \rho_1=\overline{\lim}\frac{\rho\log|a_n|+n\log n}{n\log_2 n},\qquad \ldots,$$
$$\rho_k=\overline{\lim}\frac{\rho\log|a_n|+n\log n-\rho_1 n\log_2 n-\ldots-\rho_{k-1}n\log_k n}{n\log_{k+1}n},\qquad \ldots,$$

les limites supérieures étant prises pour $n\to\infty$. On a alors

$$r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_k r)^{\rho_k-\varepsilon}<\log M(r)<r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_k r)^{\rho_k+\varepsilon},$$

la dernière pour $r>r_0$ et la première pour une suite $r=r_i$, $r_i\to\infty$ pour $i\to\infty$. La démonstration résulte des inégalités de Lindelöf-Boutroux, mais elle peut être faite directement. En désignant encore par a'_n les coefficients tayloriens relatifs à z_1, on a, en posant $z_1-z_0=h$,

$$a'_n=a_n+C^1_{n+1}a_{n+1}h+\ldots+C^p_{n+p}a_{n+p}h^p+\ldots.$$

Posons

$$-\frac{1}{\rho'}=\overline{\lim}\frac{\log|a'_n|}{n\log n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho'_k=\overline{\lim}\frac{\rho'\log|a'_n|+n\log n-\rho'_1 n\log_2 n-\ldots-\rho'_{k-1}n\log_k n}{n\log_{k+1}n}.$$

Supposons l'existence de ρ, ρ_1, ..., ρ_k, celle de $\rho'=\rho$, $\rho'_1=\rho_1$, ..., $\rho'_{k-1}=\rho_{k-1}$, et démontrons que $\rho'_k=\rho_k$. On a, par hypothèse, pour $n>N_0$,

$$\rho\log|a_n|+n\log n-\rho_1 n\log_2 n-\ldots-\rho_{k-1}n\log_k n<(\rho_k+\varepsilon)n\log_{k+1}n$$

ou

$$|a_n|<\left[\frac{(\log n)^{\rho_1}(\log_2 n)^{\rho_2}\ldots(\log_k n)^{\rho_k+\varepsilon}}{n}\right]^{\frac{n}{\rho}},$$

et l'on voit sans peine que cette dernière fonction de n est constamment décroissante pour $n>N_1$. On a donc, pour $n>N$ et $|h|<1$,

$$|a'_n|<\left[\frac{(\log n)^{\rho_1}(\log_2 n)^{\rho_2}\ldots(\log_k n)^{\rho_k+\varepsilon}}{n}\right]^{\frac{n}{\rho}}(1+C^1_{n+1}|h|+\ldots+C^p_{n+p}|h|^p+\ldots)$$
$$=\left[\frac{(\log n)^{\rho_1}\ldots(\log_k n)^{\rho_k+\varepsilon}}{n}\right]^{\frac{n}{\rho}}(1-|h|)^{-n-1}.$$

(¹) *Acta Soc. Fenn.*, **31**, 1903, p. 1.
(²) *Acta mathem.*, **28**, 1904, p. 97.

d'où

$$\rho' \log |a'_n| < -n \log n + \rho'_1 n \log_2 n + \ldots$$
$$+ \rho'_{k-1} n \log_k n + (\rho_k + \varepsilon) n \log_{k+1} n - \rho'(n+1) \log(1 - |h|),$$

qui donne de suite $\rho'_k \leq \rho_k + \varepsilon$, et, comme ε est arbitraire, $\rho'_k \leq \rho_k$. Mais, en partant de l'élément centré sur z_1 on déduirait (6) de même $\rho_k \leq \rho'_k$, donc $\rho'_k = \rho_k$. Une difficulté se présente en supposant $\rho'_k = -\infty$. Mais nos égalités s'écrivent alors de la même façon en posant A à la place de $\rho_k + \varepsilon$, A étant un nombre négatif aussi grand que l'on veut, et le raisonnement réciproque donne alors $\rho_k < A$, d'où $\rho_k = -\infty$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi, les constantes ρ_k sont des invariants de prolongement dans un cercle de rayon 1 si elles sont finies au centre de ce cercle. On voit donc de proche en proche que ce sont des invariants valables dans tout le plan. Le nombre de ces invariants asymptotiques peut être infini lorsque aucun d'eux n'est infini; car $\rho_k = \pm\infty$ rend impossible la formation de ρ_{k+1}. Il y a lieu alors de suivre encore de plus près la croissance de $\log M(r)$ et de définir de nouvelles constantes de croissance; on peut dire la même chose quant aux fonctions entières d'ordre infini.

GÉODÉSIE. — *Sur une méthode de mesure des angles par répétitions fractionnées.* Note [1] de MM. **Charles Schmerber**, **Pierre Tardi** et **Paul Caillol**, présentée par M. Georges Perrier.

Il existe deux méthodes classiques pour la mesure des angles sur le terrain : la méthode de la *répétition* et la méthode de la *réitération*.

La première, mise en œuvre à l'aide des *cercles répétiteurs* de Borda, a été utilisée par les Ingénieurs Géographes jusqu'au milieu du siècle dernier. Elle a été abandonnée à cause de la grande difficulté de construire un appareil permettant de l'appliquer en toute rigueur.

Cette méthode est pourtant supérieure à la méthode de la réitération, utilisée de nos jours de façon à peu près exclusive, comme l'a montré en particulier M. Jules Baillaud en se référant aux étalonnages connus de plusieurs cercles gradués utilisés dans les instruments méridiens astronomiques [2].

---

(6) Ce raisonnement est employé dans une question analogue par Polyá et Szegö, *Aufgaben u. Lehrsätze aus der Analysis*, **1**, p. 133.

(1) Séance du 13 septembre 1937.

(2) *Bulletin géodésique*, **13**, 1934, p. 38 à 47.

Or il est facile d'utiliser, avec un instrument réitérateur moderne, une méthode (que nous avons appelée par répétitions fractionnées) qui bénéficie de presque tous les avantages théoriques de la méthode de répétition proprement dite.

On effectue n mesures *indépendantes* de l'angle AB, comprenant chacune, pointés au fil mobile oculaire et lecture, des microscopes aussi bien sur le signal A que sur le signal B. Maison s'astreint, pour la mesure de rang p, à avoir pour le signal A une lecture *totale* (lecture du limbe et appoint des microscopes) très voisine de celle que l'on avait sur le signal B, à la mesure de rang $(p-1)$. Il est évident qu'en prenant la moyenne de n mesures faites, on élimine toute la partie systématique des erreurs concernant à la fois les traits du limbe que l'on a utilisés et les lectures de microscopes que l'on a effectuées sur ces traits.

Restent seulement à considérer :

divisées par n, les erreurs systématiques concernant la division et la lecture de microscopes pour la première des lectures sur A et la dernière des lectures sur B ([3]).

variant de façon inversement proportionnelle à $\sqrt{n}$, les erreurs accidentelles de lecture tant au fil mobile oculaire qu'aux microscopes.

Si l'on forme la somme Σ_p de p mesures consécutives, la valeur la plus probable de l'angle est Σ_p/p. On a ainsi pour l'angle cherché des valeurs qui tendent de plus en plus vers celle que l'on sera conduit à adopter définitivement lorsque p aura atteint une valeur n fixée à l'avance. Ce groupement de résultats en amélioration progressive permet à l'observateur de se rendre compte du moment où les observations supplémentaires ne modifient le résultat final que de quantités négligeables. En outre, si, par suite d'un hasard malencontreux, la $n^{\text{ième}}$ et dernière répétition se termine sur un trait entaché d'une erreur exceptionnellement grande, il se produira une brusque variation de la valeur de Σ_p/p. L'observateur, averti par cette brusque variation, peut soit s'arrêter à la $(n-1)^{\text{ième}}$ répétition, si la suite de Σ_p/p est suffisamment régulière, soit faire une $(n+1)^{\text{ième}}$ répétition, pour que l'erreur de division du trait incriminé soit éliminée.

Dans l'application de cette méthode on conserve l'indépendance des mesures individuelles que les conditions parfois précaires ou fugitives

---

([3]) Si A est une référence commune aux différentes directions du tour d'horizon, seule la seconde de ces erreurs subsistera, divisée par n, dans le résultat final des observations mis sous forme de tour d'horizon.

de visibilité rendent nécessaire. On conserve également la possibilité d'opérer par mesures *aller et retour*, c'est-à-dire par couples, méthode qui permet seule l'élimination de la *torsion*, souvent assez considérable sur signaux géodésiques élevés.

On trouvera ci-après les résultats d'une série de 10 mesures par couples, obtenue au cours d'une campagne d'observations géodésiques de premier ordre effectuée en 1937. On remarquera l'excellence du cercle azimutal utilisé, cercle n° 11, construit à Paris par Chasselon, sur les indications et d'après les dessins de la Section des Instruments du Service géographique de l'Armée.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que, si les moyennes Σ_p/p atteignent très rapidement une valeur très voisine de leur valeur finale (ce qui prouve la *convergence* très rapide de la méthode), les valeurs individuelles des angles mesurés se répartissent néanmoins sur près de 10".

Des expériences sont actuellement en cours en vue de réaliser un instrument permettant également l'application de la méthode de répétition proprement dite, c'est-à-dire sans lecture de microscopes intermédiaires.

EXEMPLE D'APPLICATION.

Date, 20-25 mai 1937. *Observateur*, Commandant Tardi.

Station de Forêt Villiers.

Angle mesuré { Référence (panneau) (K = 8 km). / Vauchonvilliers (K = 34 km).

Numéro de la répétition.	Valeur du couple observé.	Σ_p.	$\frac{\Sigma_p}{p}$.
1	376ᴳ.1031",65	31",65	376ᴳ.1031",65
2	25,80	57,45	28,73
3	27,96	85,41	28,47
4	26,37	111,78	27,95
5	35,03	146,81	29,36
6	29,80	176,61	29,44
7	28,24	204,85	29,29
8	30,37	235,22	29,40
9	28,71	263,93	29,33
10	30,23	294,16	29,41
Valeur adoptée	**376.1029,41**		

MAGNÉTISME. — *Propriétés magnétiques des alliages du fer avec l'iridium.* Note de M. **Maurice Fallot**, transmise par M. Pierre Weiss.

Aucun renseignement n'a été publié jusqu'ici sur les alliages du fer avec l'iridium. Ce dernier élément cristallise dans un réseau cubique à faces centrées dont la maille est très voisine de celle du platine, l'existence de solutions solides avec le fer était donc très probable.

Les études métallographiques et magnétiques que j'ai effectuées ont vérifié cette attente : les alliages obtenus dans le réseau α du cube centré sont ferromagnétiques jusqu'à 15 pour 100 (atom.) d'iridium (37,8 pour 100 spéc.).

Les points de Curie, les points de transformations et les moments ferromagnétiques ont été déterminés; la ressemblance avec les propriétés analogues des alliages du fer avec le ruthénium et l'osmium [1] est très grande :

De 0 à 2 pour 100 (atom.), les alliages sont réversibles dans la région des points de Curie. De 2 à 5 pour 100, leurs points de Curie s'observent facilement aux températures croissantes; mais aux températures décroissantes, ils ne se manifestent que si la température de transformation $\alpha \rightarrow \gamma$ n'a pas été dépassée lors de l'échauffement; en effet, dans ces limites de concentrations, l'état γ peut subsister à des températures inférieures à celles des points de Curie.

Au delà de 5 pour 100, les points de Curie de l'état α ne sont pas observables directement, les alliages présentent les caractères bien connus des ferronickels irréversibles.

La figure montre le début et la fin des transformations $\alpha \rightarrow \gamma$ et $\gamma \rightarrow \alpha$, chacune d'elles s'étend sur un intervalle de températures d'autant plus grand que le titre est plus élevé.

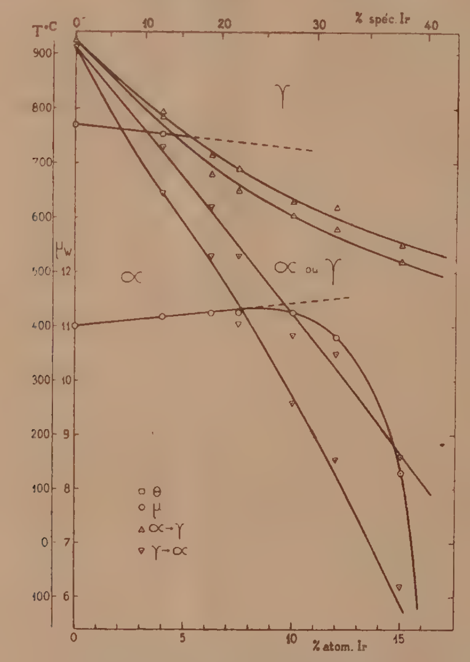
Les points de Curie s'abaissent lorsque le titre en iridium augmente; le taux de variation, 4°C. par atome introduit dans le fer, est intermédiaire entre celui des fer-platine (0°C.) et celui des fer-osmium (11°C.)

Le moment atomique moyen augmente linéairement avec le titre en iridium. Ce fait est remarquable, et parmi les solutions solides d'éléments non ferromagnétiques dans le fer, il ne s'observe qu'avec le rhodium [2], le

(1) M. Fallot, *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 227.

(2) M. Fallot (inédit).

platine ([3]) et l'iridium. Toutefois, pour ce dernier, le taux de variation plus faible que dans le cas du platine (pente de la droite : $+4,3$ au lieu de $+9,9$), et l'intervalle restreint d'existence de la phase α contribuent à rendre moins élevé le maximum de moment moyen : alors qu'il était de 12,25 magnétons de Weiss pour le fer-platine à 12,5 pour 100, il



Pour la transformation $\alpha \to \gamma$, la courbe inférieure en marque le début et la courbe supérieure, la fin.
Pour la transformation $\gamma \to \alpha$, la courbe supérieure en marque le début et la courbe inférieure, la fin.

atteint seulement 11,3 magnétons de Weiss pour 7 pour 100 environ d'iridium.

Au delà de ce titre, le moment moyen décroît très rapidement lorsque le titre augmente. Cette allure de variation ressemble plus à celle qui a été trouvée pour les fer-osmium et les fer-ruthénium qu'à celle des ferroplatine.

([3]) M. Fallot, *Comptes rendus*, **199**, 1934, p. 128; L. Graf et A. Kussmann, *Phys. Zeits.*, **36**, 1935, p. 544.

RAYONS X. — *Étude de satellites* Lα *pour quelques éléments lourds et terres rares*. Note de Mlle **Yvette Cauchois**, transmise par M. Jean Perrin.

On trouvera ci-dessous quelques nouveaux résultats d'une étude d'ensemble sur les émissions *hors-diagramme* qui accompagnent les raies Lα des éléments lourds.

Ces émissions sont très complexes. Comme je l'ai déjà montré [1], on peut suivre, vers les courtes ondes par rapport à α_1, depuis l'uranium, au moins trois satellites (maxima d'intensité) : α^x, α^{ix} et α'; deux (a^{ix} et α') sont confondus au celtium ($z=72$). J'avais signalé que l'émission globale est encore très nette jusqu'à l'erbium (68) et j'y avais mesuré α^x et α'. Cependant, on admettait que les satellites Lα n'étaient pas observables de $z=75$ à $z=56$. J'ai donc cru intéressant d'étendre l'analyse à des éléments encore plus légers.

Dy (66). J'ai étudié son émission sur un échantillon d'oxyde de dysprosium très concentré, préparé et mis à ma disposition par MM. G. Urbain et Trombe. Plusieurs plans réticulaires internes de deux quartz très minces courbés sous 40 et 20^cm de rayon m'ont servi pour obtenir de nombreux spectres dans divers ordres. J'ai refait à cette occasion les mesures de α_1, α_2 et η (2e ordre de plans normaux aux faces des lames) par rapport à FeKα (2e ordre) et WLβ (3e ordre) [2] (Tableau I). Tous les clichés

Tableau I.

		λ u. x.	ν/R.
66 Dy	α_2	1915,9₆	475,62
»	α_1	1904,9₀	478,38
»	η	1893,5	481,26
64 Gd	η	2045,2	445,56

montrent entre η et α_1 deux raies un peu plus faibles que η et qui sont identifiables à α^x et a'. Vers les grandes ondes de α_1 on trouve deux autres raies hors-diagramme, sans doute de même nature que celles notées ci-après α^z (Tableau II).

Malgré les difficultés d'étude des rayonnements peu pénétrants à l'aide

(1) *Comptes rendus*, **200**, 1935, p. 1194; **201**, 1935, p. 721; **202**, 1936, p. 2068; **203**, 1936, p. 398.

(2) M. Siegbahn, *Spektroskopie der Röntgenstrahlen*, 2e Aufl.

des appareillages dont je disposais, j'ai encore pu observer des émissions « hors diagramme » pour le gadolinium (64) et le samarium (62). Sur mes clichés elles sont peu intenses mais distinctes malgré la dispersion, petite dans ce cas (22*ux*/mm), et la faible exposition des raies de diagramme elles-mêmes. Ici encore chaque raie α_1 présente une dissymétrie marquée vers les grandes ondes; au gadolinium elle doit être due, en partie, à la raie α_{I}^{z}, non encore mesurée pour cet élément ([2]), dont on trouvera dans le Tableau I une première estimation; au samarium cette dissymétrie doit indiquer la présence d'au moins un satellite de α_1.

TABLEAU II.

		λ u. x.	ν/R.	Δν/R à α_1.			λ u. x.	ν/R.	Δν/R à α_1.
92 U	α_{I}^{z}	909,8	1001,61	—1,17	78 Pt.....	α^{y}	1308,7	696,32	+0,87
90 Th	α_{I}^{z}	955,1	954,10	—1,06	»	α_{II}^{z}	1311,1	695,04	—0,41
83 Bi.....	α_{I}^{z}	1142,2	797,82	—0,49	»	α_{III}^{z}	1312,1	694,51	—0,94
»	α_{II}^{z}	1142,7	797,47	—0,84	75 Re.....	α^{y}	1428,5	637,92	+0,66
80 Hg	α^{y}	1236,9	736,74	+1,04	»	α_{II}^{z}	1430,3	637,12	—0,14
»	α_{I}^{z}	1239,2	735,37	—0,33	»	α_{III}^{z}	1431,9	636,40	—0,86
»	α_{II}^{z}	1239,7	735,07	—0,63	73 Ta.....	α^{y}	1517,5	600,51	+0,54
»	α_{III}^{z}	1240,4	734,66	—1,04	66 Dy	α^{x}	1898,1	480,10	+1,72
79 Au	α^{x}	1268,63*	718,31	+2,90	»	α'	1901,1	479,33	+0,95
»	α_{II}^{x}	1269,2	717,99	+2,58	»	α_{III}^{z}?	1907,2	477,80	—0,58
»	α^{ix}	1270,35*	717,34	+1,93	»	–	1912,3	476,53	—1,85
»	α'	1271,46	716,71	+1,30	64 Gd	α^{x}	2035,7	447,64	+1,36
»	α^{y}	1272,15	716,32	+0,91	62 Sa.....	α^{x}	2189,0	416,29	+1,13
»	α_{II}^{z}	1274,6	714,95	—0,46	»	α_{III}^{z}?	2197,7	414,65	—0,51
»	α_{III}^{z}	1275,5	714,44	—0,97					

(*) Voir références ([3]) et ([4]).

J'ai, d'autre part, refait quelques spectres pour les groupes Lα d'atomes lourds dans de bonnes conditions de résolution afin d'en affiner l'analyse.

Émissions de fréquences supérieures à celles de α_1. — Au (79). On connaissait deux raies : α^{x} et α^{ix} ([3]), ([4]). Mes clichés montrent que α^{ix} est la plus fine et la plus intense; α^{x} se résout en deux composantes. Plus près de α_1 se voient encore d'autres raies; j'en ai mesuré deux : α', dont j'avais signalé l'existence pour certains atomes voisins; α^{y}, nouvelle à ma connaissance.

([3]) F.-K. RICHTMYER, S. KAUFMAN, *Phys. Rev.*, **44**, 1933, p. 605.

([4]) H. CLAËSSON, *Zeits. f. Phys.*, **85**, 1933, p. 231.

Hg (80). Je complète ici mes observations précédentes faites avec un mica courbé, sous une dispersion plus petite (5).

Autres atomes lourds. — L'émission nouvelle α^{y} a été suivie depuis Ta (73); elle semble se rapprocher de α' et n'en est plus séparable sur mes clichés vers la fin du système périodique (Tableau II).

Émissions de fréquences inférieures à celles de α_1. — J'avais signalé l'étalement apparent de α_1 vers les grandes ondes (6); on y distingue ici plusieurs satellites. Je donne, dans le Tableau II, ceux que j'ai pu systématiser (en trois groupes : α_{I}^{z}, α_{II}^{z}, α_{III}^{z}). Les mesures sont difficiles; mes nombres ne prétendent pas à une grande précision; il y aura d'ailleurs peut-être lieu de modifier, après plus ample étude, les filiations adoptées. Je veux seulement attirer l'attention sur l'existence même de ces émissions.

Un essai récent d'estimation quantitative de l'apparence des satellites Lα de l'or (7), dans l'hypothèse de leur émission par des atomes doublement ionisés en couche M, fait attendre la présence d'une bande non résoluble vers les grandes ondes de α_1. Les prévisions numériques diffèrent encore beaucoup des données expérimentales, aussi bien pour cette bande que pour celle située vers les courtes ondes de α_1.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Cultures en série de tissus végétaux sur milieu artificiel.* Note (1) de M. **Pierre Nobécourt**, transmise par M. Alexandre Guilliermond.

Nous avons montré (2) que, si l'on place dans un milieu humide des tranches de carotte découpées aseptiquement, il se produit en quelques semaines, à la surface du bois, du liber ou dans la région du cambium, des proliférations cellulaires absolument analogues à celles obtenues par R. Gautheret (3) dans ses intéressantes recherches sur la culture du tissu cambial de divers arbres. Ces proliférations revêtent le plus souvent

---

(5) *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 1194.
(6) *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 2068.
(7) F.-K. Richtmyer, E.-G. Ramberg, *Phys. Rev.*, 51, 1937, p. 925.

(1) Séance du 13 septembre 1937.
(2) *Thèse Sciences*, Lyon, 1927, p. 116, et P. Nobécourt et A. Dusseau, *Congrès de l'Assoc. franç. p. l'Avancem. des Sc.*, Paris, juill. 1937.
(3) *Thèse Sciences*, Paris, 1935.

l'aspect de sortes de tumeurs se développant aux dépens des réserves contenues dans les anciens tissus.

Nous avons cherché à cultiver ces tissus néoformés, sur milieu artificiel et en l'absence de tout fragment de tissu normal. Après plusieurs tentatives infructueuses, nous venons d'obtenir des résultats entièrement satisfaisants.

Nos cultures sont faites en boîtes de Borrel identiques à celles employées dans la culture des tissus animaux. Le milieu de culture comprend une partie solide et une partie liquide. Pour l'obtenir, on prépare la solution suivante :

Eau bi-distillée	2000
Glucose	40
Azotate de calcium	1
Azotate de potasse	0,25
Phosphate monopotassique	0,25
Sulfate de magnésie	0,25

On y ajoute 30 gouttes de la solution oligodynamique préconisée par Albert Berthelot [4], apportant au milieu nutritif du fer, du manganèse, du nickel, du cobalt, du titane, du zinc, du cuivre, du glucinium et du bore, et l'on ajuste le pH à 6,5 par addition d'une quantité convenable d'une solution concentrée de carbonate de potasse.

De la solution nutritive ainsi obtenue, on fait deux parts. L'une est solidifiée par adjonction de 15 pour 1000 de gélose préalablement soigneusement lavée. Ce milieu nutritif gélosé est stérilisé à l'autoclave et réparti aseptiquement avant solidification dans les boîtes de Borel préalablement passées au four à flamber. Chaque boîte reçoit ainsi $1^{cm^3},5$ de ce milieu qu'on laisse se solidifier en couche mince sur le fond de la boîte.

La deuxième part de la solution est additionnée de 25^{mg} de chlorhydrate de cystéine et de 5^{mg} d'acide indol-β-acétique, par litre. On stérilise ensuite par filtration sur bougie et l'on ajoute aseptiquement, dans chaque boîte de Borel, également $1^{cm^3},5$ de cette liqueur. En plaçant horizontalement les boîtes de Borel, le liquide s'étale à la surface de la gélose solidifiée, qu'on laisse s'imprégner pendant 24 heures.

Le matériel étant ainsi préparé, de minces tranches décapées aseptiquement avec une aiguille à cataracte, dans une tumeur qui s'était développée sur une tranche de Carotte, ont été déposées à la surface de la gélose et

---

([4]) *Bull. Soc. Chimie biol.*, 16, 1934, p. 1553.

les boîtes de Borel ont été inclinées de façon à empêcher le liquide de venir en contact avec les fragments de tissus tout en lui permettant de diffuser dans la gélose.

L'orifice des boîtes ayant été paraffiné pour empêcher l'évaporation, elles furent laissées à la température du laboratoire (20° environ), exposées à la lumière diffuse. Bientôt, on put voir que la prolifération cellulaire commençait et, au bout d'un mois, le volume des fragments ensemencés avait considérablement augmenté. Les tranches, dont le diamètre primitif était d'environ 3 à 4^{mm}, et dont l'épaisseur n'atteignait pas 0^{mm},5, avaient pris à ce moment l'aspect de mamelons de plusieurs millimètres de haut; le diamètre s'était également accru, quoique dans de moindres proportions. On peut estimer que le volume de ces fragments avait augmenté de 10 à 30 fois, c'est-à-dire avec bien plus de rapidité que les tumeurs demeurées attenantes aux tissus normaux de la Carotte.

Les tissus des mamelons ainsi formés, comme ceux de la tumeur dont ils proviennent, contiennent de la chlorophylle. Ils sont principalement formés de cellules plus ou moins allongées, souvent arquées, peu cohérentes entre elles. Dans un prochain travail, nous décrirons leur structure de façon plus complète.

Ajoutons que le plus volumineux des mamelons obtenus a donné naissance, à sa partie supérieure, à une mince racine, munie de poils absorbants, qui s'est dirigée vers la gélose où elle a continué sa croissance jusqu'à atteindre environ 2^{cm} de longueur.

Au bout d'un mois, l'un des mamelons a été découpé en tranches minces et celles-ci ont été ensemencées dans de nouvelles boîtes de Borel. Après deux semaines, ces fragments ont acquis un volume sensiblement égal à celui de la culture dont ils provenaient. L'un deux a été à son tour découpé en tranches, qui ont été repiquées, et dont la croissance est en cours. Notre technique permet donc la culture en série de tissus végétaux, résultat qui n'avait pu être obtenu jusqu'ici.

BIOLOGIE EXPÉRIMENTALE. — *Étude de quelques cas complexes de régénération de la tête chez les Lombrics*. Note [1] de M. **Marcel Avel**, transmise par M. Maurice Caullery.

J'ai établi [2] que les moitiés dorsale et ventrale du *tégument* céphalique (épiderme + muscles pariétaux) des Lombrics jouaient un rôle différent dans la régénération de la tête après amputation. Les expériences sur lesquelles je fondais cette conclusion ont été complétées et approfondies.

I. Dans la région céphalique, du 4e au 10e segment, j'ai remplacé le tégument dorsal par le tégument ventral (avec la chaîne nerveuse) des segments correspondants, prélevé sur un autre Lombric. Après guérison, j'ai amputé l'animal de ses 5 ou 6 premiers segments. La surface de section est donc pourvue de deux téguments ventraux et privée de tégument dorsal.

Ces opérés régénèrent des *têtes doubles*, bien que les organes méso-endodermiques internes ne soient pas doubles. L'étude de ces régénérats sur des coupes en série montre qu'ils sont formés chacun de deux têtes sensiblement complètes, disposées comme si on les avait fendues dorsalement sur une partie plus ou moins grande ou même la totalité de leur longueur, puis soudées par les parties correspondantes de cette incision. Les organes ventraux sont ainsi bien distincts, et correctement orientés par rapport à la base, tandis que les organes dorsaux sont placés sur la ligne de suture des deux composants, c'est-à-dire sur les flancs, et sont formés chacun, en réalité, comme le montre leur position par rapport aux autres parties, de deux demi-organes fusionnés, dont chaque moitié appartient à l'un des composants.

II. J'ai effectué l'expérience inverse de la précédente, en remplaçant le tégument céphalique ventral (sans la chaîne nerveuse, qui est laissée en place) par le tégument dorsal de la même région, pris sur un autre Lombric. Après guérison et amputation de la tête dans la région ainsi modifiée, la surface de section est dépourvue de tégument ventral et présente deux téguments dorsaux.

Les résultats de cette opération sont variables, mais forment, dans leur ensemble, une série continue. Le régénérat est une *tête simple*, qui se déve-

---

[1] Séance du 13 septembre 1937.

[2] *Comptes rendus*, **194**, 1932, p. 2334.

loppe toujours plus lentement, et reste finalement plus petite que celle des témoins. C'est, soit une tête réduite, mais bien conformée, soit une production filiforme, sans axe dorso-ventral net; fréquemment, même, il ne se développe aucun régénérat.

Le faible volume moyen des régénérats obtenus dans ces conditions fait d'abord penser à une insuffisance de *matériel* régénérateur. Cette explication doit être écartée. En effet, j'ai montré (3) que, si le tégument céphalique ventral est remplacé, non pas par le tégument dorsal de la même région, comme précédemment, mais par le tégument ventral de la région neutre, dépourvu de pouvoir régénérateur, la régénération de la tête est simplement ralentie, mais non modifiée, et s'effectue toujours.

L'absence de tégument ventral semble au contraire amoindrir le pouvoir *organisateur*. A partir d'un certain degré de petitesse, les régénérats n'ont pas d'axe dorso-ventral bien net. Sur les régénérats plus grands, on observe un axe dorso-ventral correct, mais cet axe est orienté de manière variable par rapport à l'axe correspondant de la base.

Or les régénérats minuscules ne sont pas nécessairement anormaux. Par déviation de la chaîne nerveuse dans une fenêtre tégumentaire latérale, j'ai pu en effet provoquer la poussée de têtes parfois filiformes et cependant d'une morphologie externe correcte.

Tout semble donc se passer, dans l'expérience II, comme si, en présence de tégument dorsal seul, l'axe dorso-ventral du régénérat avait peine à s'établir.

S'il en est ainsi, un fragment, même petit, de tégument ventral doit faciliter la détermination de cet axe, donc la régénération. L'expérience III confirme pleinement cette présomption.

III. Le tégument céphalique ventral est remplacé par le tégument céphalique dorsal, comme précédemment (II), mais une petite bande de ce tégument ventral est conservée au niveau de la chaîne nerveuse, sous le tégument dorsal greffé. Après amputation de la tête dans ces conditions, on obtient *toujours* la régénération d'une tête normalement constituée, et normalement orientée par rapport aux parties anciennes laissées en place.

On obtient un résultat analogue si, dans la bandelette de tégument ventral, on détruit au galvanocautère tout l'épiderme et une partie des muscles sous-jacents.

Par conséquent le *tégument céphalique ventral* peut à la fois fournir les

---

(3) *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 374, expérience *b*.

cellules ecto- et mésodermiques d'un blastème de régénération, et exercer sur ce blastème une action organisatrice complète. Le *tégument céphalique dorsal* peut, lui aussi, édifier un blastème, mais par contre son pouvoir organisateur est incomplet, en particulier il ne semble pas apporter toujours les éléments de dissymétrie nécessaires à la détermination d'un axe dorso-ventral correct.

Les propriétés des deux moitiés du tégument semblent d'ailleurs présenter des différences plus qualitatives que quantitatives. En outre, une expérience précédemment discutée ([4]) permet de préciser que la cause de ces différences est de nature physiologique et non pas morphologique.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Le diacétyle dans les beurres normands.* Note de MM. **Ch. Brioux** et **Edg. Jouis**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Le diacétyle, produit normal du métabolisme des êtres vivants et, en particulier, des fermentations butylène-glycoliques ([1]), est considéré comme l'un des principaux facteurs de l'arôme des beurres; toutefois, il n'est généralement produit qu'en très minime quantité au cours des fermentations lactiques naturelles, accompagné d'une dose plus importante d'acétylméthylcarbinol.

On a songé à utiliser le diacétyle pour améliorer les beurres manquant d'arôme; mais l'emploi des bonificateurs pour beurres a été interdit par la loi du 2 juillet 1935. Il importe donc, pour pouvoir dépister les beurres susceptibles d'avoir été aromatisés artificiellement, d'être fixé dans la mesure du possible sur les teneurs en diacétyle naturel des beurres purs des diverses régions.

A la demande du Ministère de l'Agriculture, nous avons étudié à ce point de vue particulier les beurres du Calvados et de la Manche, ainsi qu'un certain nombre de beurres et de crèmes de la Seine-Inférieure. Environ 130 échantillons furent prélevés sur les marchés ou dans les Laiteries coopératives et industrielles.

Méthode d'analyse. — Les beurres étaient analysés aussitôt que possible après les prélèvements, le plus souvent dans les 48 heures. Vu les doses

---

([4]) *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 255.

([1]) Lemoigne et Monguillon, *Ann. des Falsif.*, n° 313, 1935, p. 278.

très minimes de diacétyle à déterminer, la méthode pondérale de Lemoigne, au diméthylglyoximate de nickel, n'était pas pratiquement applicable; nous avons utilisé la méthode colorimétrique très sensible imaginée par MM. Pien, Baisse et Martin (²), en opérant sur 400^g ou 500^g de beurre.

L'acétylméthylcarbinol, bien que n'intervenant pas directement dans l'arôme des beurres, car il est sans odeur, fut dosé dans un certain nombre d'échantillons, sous forme de diacétyle, après oxydation en présence de perchlorure de fer.

Résultats obtenus. — Ils se répartissent ainsi pour les beurres :

Teneurs en diacétyle.	Nombre d'échantillons.	Soit pour 100 échantillons.	
De traces à 0^{mg},05 par kilogramme...........	24	20,4	76,3
De 0^{mg},06 à 0^{mg},10 »	18	15,2	
De 0^{mg},11 à 0^{mg},50 »	48	40,7	
De 0^{mg},51 à 1^{mg},00 »	18	15,3	
De 1^{mg},10 à 1^{mg},50 »	9	7,6	
De 1^{mg},50 à 2^{mg},50 »	1	0,8	
Total................	118	100,0	

Donc 76,3 pour 100 des beurres examinés jusqu'ici ne contiennent que des doses très faibles de diacétyle, variant de traces à 0^{mg},5 par kilogramme.

Les chiffres les plus élevés, variant de 1^{mg} à 1^{mg},5 par kilogramme, avec un maximum exceptionnel de 2^{mg},5 furent surtout fournis par les beurres des Laiteries coopératives et industrielles.

En ce qui concerne l'acétylméthylcarbinol, qui peut donner par oxydation des traces de diacétyle, 73 pour 100 des beurres examinés en renfermaient de 1^{mg},3 à 25^{mg} par kilogramme; le maximum trouvé fut de 69^{mg},1 par kilogramme.

En général, les beurres pauvres en diacétyle sont le plus souvent pauvres ou assez pauvres en acétylméthylcarbinol, et les beurres riches en diacétyle le plus souvent riches en son produit de réduction; mais ce n'est pas une règle absolue.

Les *crèmes* fermentées prêtes au barattage sont plus riches en diacétyle et surtout en acétylméthylcarbinol que les beurres correspondants; ces deux corps passent surtout dans le babeurre, comme le montrent les chiffres ci-après, s'appliquant à des produits analysés le jour même de la

(²) *Le Lait*, 17, n° 167, 1937, p. 673.

fabrication du beurre, ou au plus tard le lendemain matin (Laiterie de Royville, Seine-Inférieure) :

		Diacétyle. (mg)	Acétylméthyl-carbinol. (mg)
16 juin	Crème	2,25	176,7
	Beurre	1,13	23,4
	Babeurre	4,32	198,1
23 juin	Crème	1,92	95,2
	Beurre	1,50	42,4
	Babeurre	3,10	195,3

Le diacétyle naturel des beurres semble disparaître assez rapidement, soit par volatilisation, soit par réduction en acétylméthylcarbinol ou sous une autre forme. Des dosages échelonnés, effectués sur une même motte de beurre conservée dans une cave fraîche, donnèrent, par kilogramme :

	Diacétyle. (mg)	Acétylméthyl-carbinol. (mg)
Le lendemain du barattage	1,50	42,4
Après 5 jours	0,60	—
Après 18 jours	0,13	—
Après 27 jours	0,05	20,4

Cette constatation présente une assez grande importance du point de vue spécial de la répression des fraudes.

Il serait utile de posséder des documents du même genre pour nos diverses régions laitières et beurrières.

La séance est levée à 15h30m.

A. Lx.